

Dados Práticos Auxiliares Para o Cálculo de Áreas Extra-poligonais

Hans A. Thofehn, Cartógrafo pela Universidade
de George Washington

A avaliação de áreas extra-poligonais deve ser feita, sempre que possível, por processos de geometria analítica, restringindo-se a aplicação do planímetro às sub-figuras de contorno irregular.

As avaliações de área pelo planímetro estão sujeitas a erros sensíveis, acumulando imperfeições mecânicas, pessoais e sistemáticas. Dão margem a alguns destes erros, fatores como: a desretificação do planímetro, imperfeição do desenho, dilatação do papel e reiteração insuficiente das leituras.

PARA O LEVANTAMENTO DE DETALHES POR IRRADIAÇÃO SÃO FORMULAS Úteis:

ITEM 1

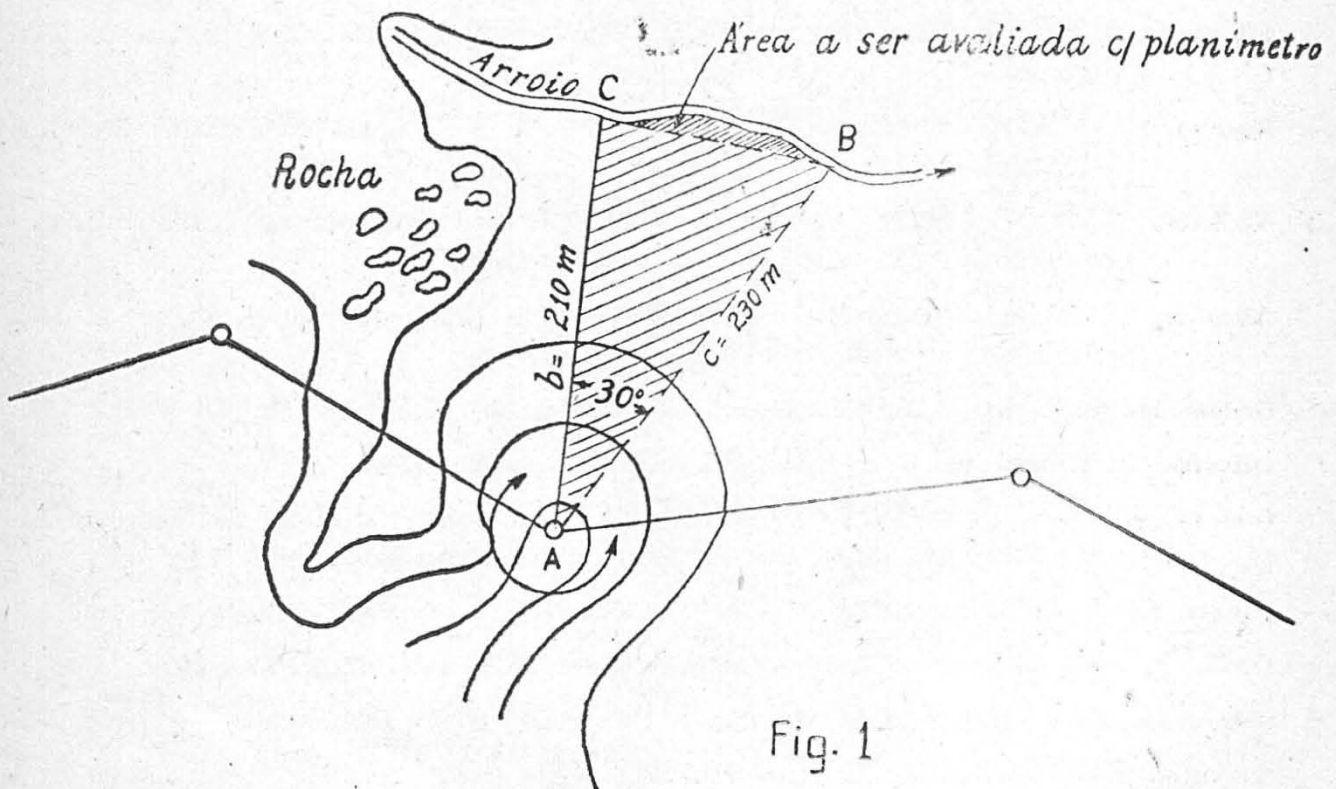


Fig. 1

Quando medidos dois lados e o ângulo compreendido; Então: A área de um triângulo é igual a metade do produto de dois lados quaisquer, multiplicado pelo seno do ângulo compreendido.

$$S = \frac{1}{2} b c \text{ sen } A$$

Exemplo: Dados dois lados e o ângulo compreendido:

$$A = 30^\circ \quad S = \frac{1}{2} bc \text{ sen } A; \quad S = \frac{1}{2} 210 \cdot 230 \text{ sen } 30^\circ$$

$$b = 210\text{m}$$

$$c = 230\text{m} \quad S = 2.4150 - 0,50000 = 1.2075 \text{ m}^2$$

$$\text{Área do triângulo A B C} = 1\text{Ha } 20\text{a } 75\text{ca}$$

Ainda para o levantamento por irradiação:

ÍTEM 2

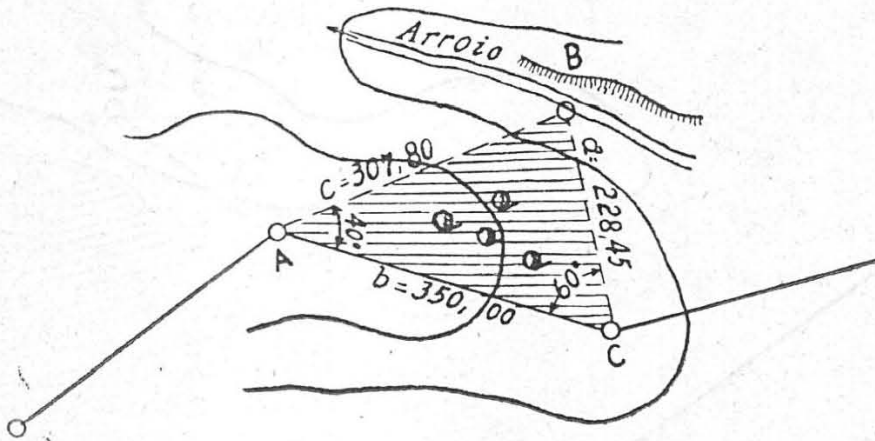


Fig. 2

Quando medidos a linha $AC = b$, correspondente a um lado da poligonal, os ângulos A e C e os lados c e a ;

Pode ser usada a mesma fórmula do Ítem 1, calculando-se o ângulo B :

$$B = 180^\circ - (A + C)$$

$$\text{Neste caso } S = \frac{1}{2} c a \operatorname{sen} B$$

ou então:

Medidos os ângulos A e C e o lado (poligonal) b , (não é necessário medir c e a); utiliza-se a regra:

ÍTEM 3

A área de um triângulo é igual ao quadrado de um lado qualquer dividido por duas vezes a soma das cotangentes dos ângulos adjacentes a este lado.

$$S = \frac{b^2}{2(\cot A + \cot C)}$$

$$\text{Exemplo: } S = \frac{b^2}{2(\cot A + \cot C)} = \frac{(350)^2}{2(\cot 40^\circ + \cot 60^\circ)}$$

$$b = 350\text{m}$$

$$A = 40^\circ$$

$$B = 60^\circ \quad \frac{(350)^2}{3,53820} = 3\ 46\ 22\ \text{m}^2$$

$$\text{Área do triângulo ABC} = 3\ \text{Ha}\ 46\ \text{a}\ 22\ \text{ca}$$

No caso seguinte é conveniente calcular primeiro o triângulo completado ABC e diminuir posteriormente o triângulo $A'B'C'$.

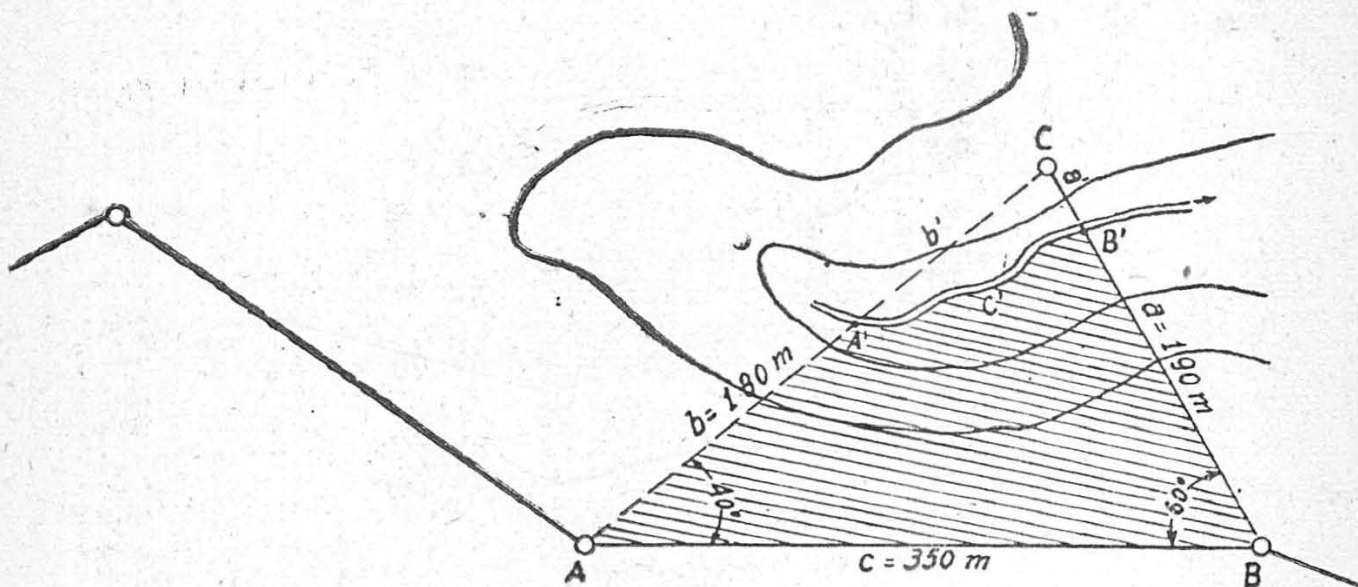


Fig. 3

O triângulo completado ABC se calcula pela fórmula do ítem 3.

$$S = \frac{C^2}{2(\cot A + \cot B)}$$

Para a avaliação do triângulo A'B'C' é necessário calcular os lados AC=b+b' e BC=a+a'. O ângulo C é 180°-(A+B).

Os lados do triângulo A'B'C' obtem-se: AC-b=b'; BC-a=a'.

A área deste triângulo, A'B'C', se pode calcular pela fórmula do ítem I; no caso:

$$S = \frac{1}{2} b'a' \text{ sen } C.$$

Deduzindo a área de A'B'C' do triângulo ABC, obtem-se a área do quadrilátero A, B, A', B'.

Exemplo:

O triângulo ABC é avaliado com marcha de cálculo idêntica ao exemplo no ítem 3.

$$S = \frac{C^2}{2(\cot A + \cot B)} = \frac{(350)^2}{3,53820} = 3 \text{ Ha } 46a22ca.$$

O Cálculo dos lados AC e BC (b+b' e a+a'); é feito pela regra:

Um lado qualquer de um triângulo é igual ao módulo multiplicado pelo seno do ângulo oposto ao dito lado.

Isto é:

$$C = 350m \quad \text{Módulo } \frac{350}{\text{sen } 80^\circ}; \quad AC = \frac{350}{\text{sen } 80^\circ} \text{ sen } 60^\circ$$

$$A = 40^\circ \quad BC = \frac{350}{\text{sen } 80^\circ} \text{ sen } 40^\circ$$

$$B = 60^\circ$$

$$Md = \frac{350}{0,98481} = 355,39 \quad \left. \begin{array}{l} AC = 355,39 \cdot 0,86603 = 307,80 \\ BC = 355,39 \cdot 0,64279 = 228,45 \end{array} \right\} \text{aproximadamente}$$

portanto:

$$b' = AC - b = 307,80 - 180,00 = 127,80$$

$$a' = BC - a = 228,45 - 190,00 = 38,45$$

Área do triângulo CA'B' **ITEM I**

$$S = \frac{1}{2} b' a' \operatorname{sen} C$$

$$S = \frac{1}{2} \times 127,80 \cdot 38,45 \operatorname{sen} 80^\circ \quad S = 2.456,95 \cdot 0,98481 = 2.419,63.$$

$$\text{Área do triângulo CA'B'} = 0\text{Ha } 24\text{a } 19\text{ca } 63\text{ dcm}^2.$$

Área do quadrilátero A B A' B' =

$$3\text{Ha } 46\text{a } 22\text{ca } 00\text{dcm}^2$$

$$24\text{a } 19\text{ca } 63\text{dcm}^2$$

$$3\text{Ha } 22\text{a } 02\text{ca } 37\text{dcm}^2$$

A maioria dos problemas da avaliação de áreas extra-polygonais por meio de irradiação, podem ser operadas com as fórmulas precedentes. Claro está que os exemplos apresentados são de casos especiais, uma vez que o afastamento da poligonal do perímetro deve ser o menor possível. Distâncias como nos casos tratados, resumem-se a situações excepcionais, ditadas por dificuldades topográficas ou condições celerimétricas do levantamento.

O método usual no levantamento da área extra-polygonal é o das ordenadas levantadas da linha poligonal sobre o perímetro.

Há, para facilidade do cálculo, conveniência que estas ordenadas sejam, sempre que se tratar de perímetros sinuosos, levantados em espaços equidistantes:

O cálculo pela regra trapezoidal estatue:

ÍTEM 4

Somam-se a metade das ordenadas extremas e tôdas as ordenadas intermediárias e multiplica-se o resultado pela distância entre as ordenadas.

$$S = \frac{(a + n)}{2} + \sum h) d$$

Exemplo: Área de BCDE =

$$S = \left(\frac{1,20 + 6,50}{2} + 2,00 + 2,90 + 3,50 + 4,80 \right) \cdot 20 = 341,00 \text{ m}^2$$

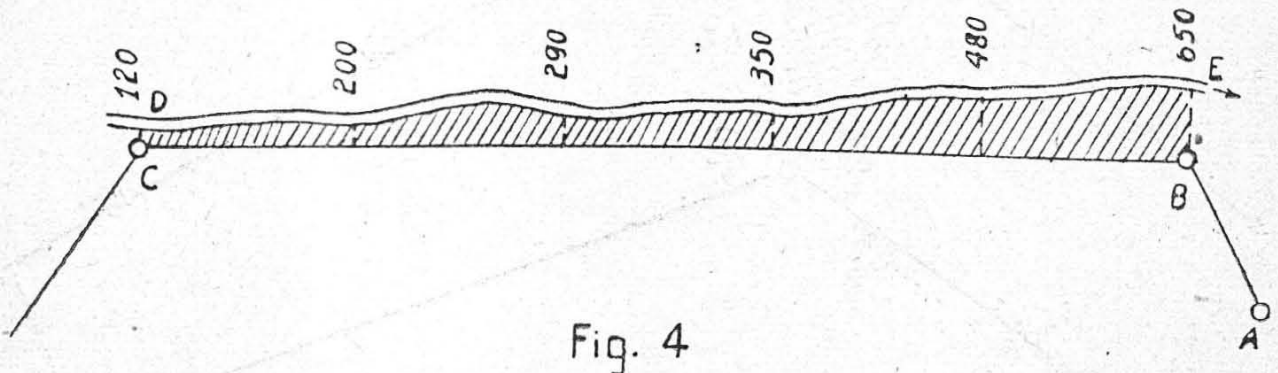


Fig. 4

Portanto: Área da figura B C D E

$$3\text{a } 41\text{ca.}$$



Maior aproximação é obtida pela fórmula de Simpson. Para a sua aplicação é necessário dividir a linha que serve base em um número par de partes iguais, adotando o seguinte critério:

Divida-se a base em um número par de partes iguais, e nos pontos de divisão levantem-se ordenadas. Numere-se as ordenadas da esquerda para a direita, somem-se as ordenadas extremas, mais quatro vezes a soma de todas as ordenadas pares e duas vezes a soma das ordenadas intermediárias ímpares: multiplique-se a soma total por um terço da distância comum entre as ordenadas consecutivas.

$$S = \left(a + n + 4 \sum h_2 + 2 \sum h_1 \right) \frac{d}{3}$$

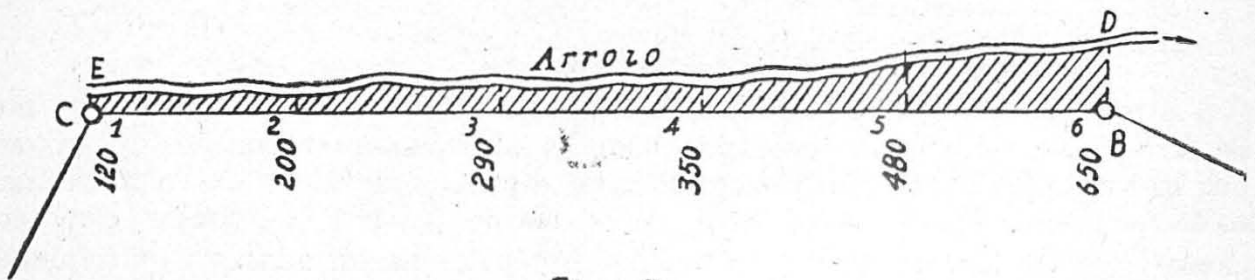


Fig. 5

Exemplo: $\left[1,20 + 6,50 + 4(2,00 + 3,50) + 2(2,90 + 4,80) \right] \frac{20}{3} = 301 \text{ m}^2$

Área da figura = 301ca

Sempre que possível é de se preferir o emprego da fórmula de Simpson.

Nos casos de coincidência de mudança de rumo na poligonal com deflexões do perímetro ou cantos de cerca, é de bom aviso medir os ângulos $A A'$ e as distâncias a , b e c , dividindo-se a área inscrita em dois triângulos $A B C$ e $A C D$ que podem ser calculados pela fórmula do **Ítem 1**.

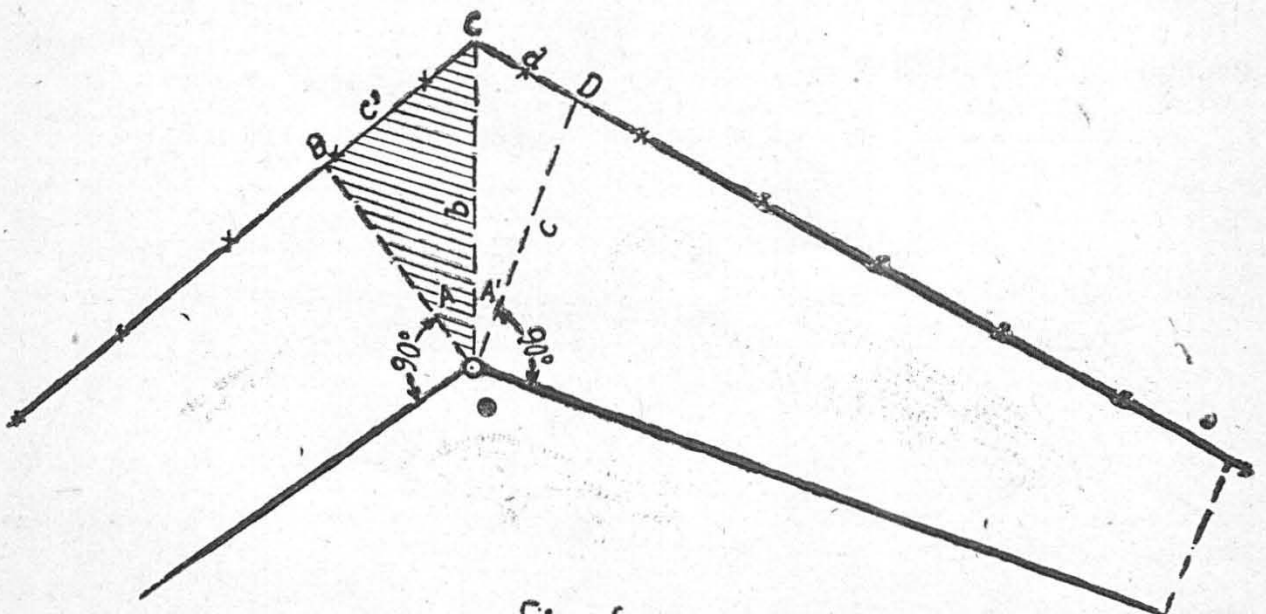


Fig. 6

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A'; \quad S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} A$$

Conhecendo-se, no caso, os três lados dos triângulos, (para efeito do levantamento, é aconselhável medir também c' e d) e, sendo pequeno o afastamento entre o polígono e o perímetro, pode-se empregar a fórmula comum de: onde s é a semi-soma dos lados.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c')}$$

onde S é a semi-soma dos lados.

Esta fórmula é conveniente para ser operada com logaritmos.

Recomendam-se especialmente as topografias de Jordan, Xerez e R. Müller, onde o assunto em foco é abordado sobre prisma mais completo e científico.

